Zentrale Erweiterungen von Eichgruppen

Christoph Wockel,
Technische Universität Darmstadt

Setting

$$P \xrightarrow{\pi} M$$

glattes G-Hauptfaserbündel, d.h. G wirkt glatt von rechts auf P mit

$$M \cong P/G$$

und π hat lokale glatte Schnitte, M kompakt.

$$\begin{aligned}\mathrm{Gau}(P) &= C^\infty(P,G)^G \\ &= \{\gamma \in C^\infty(P,G) : f(p\cdot g) = g^{-1}f(p)g\}\end{aligned}$$

Eichgruppe von P

G lokal exponentiell $\Rightarrow$ Gau(P) Lie-Gruppe mit Lie-Algebra

$$\begin{aligned}\mathfrak{gau}(P) &= C^\infty(P,\mathfrak{g})^G \\ &= \{\xi \in C^\infty(P,\mathfrak{g}) : \xi(p\cdot g) = \mathrm{Ad}(g^{-1}).\xi(p)\}\end{aligned}$$

Topologisierung von Gau(P)

- $U_i \subseteq M$ triviale Umgebungen, $V_i \subseteq U_i$ offen, so dass $\overline{V_i} \subseteq U_i$ berandete Mannigfaltigkeiten (insbesondere kompakt)
- $k_{ij} : \overline{V_i} \cap \overline{V_j} \to G$ Übergangsfunktionen

$$\mathrm{Gau}(P) \cong \{(\gamma_i) \in \textstyle\prod_{i=1}^n C^\infty(\overline{V_i}, G) : \gamma_i(x) = k_{ij}^{-1}(x)\gamma_j(x)k_{ij}(x)\}$$

$$\mathfrak{gau}(P) \cong \{(\xi_i) \in \textstyle\prod_{i=1}^n C^\infty(\overline{V_i}, \mathfrak{g}) : \xi_i(x) = \mathrm{Ad}\Big(k_{ij}^{-1}(x)\Big).\xi_j(x)\}$$

$\Rightarrow$ Gau(P) ist abgeschlossene Untergruppe von $\prod_{i=1}^n C^\infty(\overline{V_i}, G)$.

Satz: Die Einschränkungen der Karten von $\prod_{i=1}^n C^\infty(\overline{V_i}, G)$ liefert Karten für eine Lie-Gruppenstruktur auf Gau(P) falls G lokal exponentiell ist.

Zentrale Erweiterungen von $C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$

(nach Losev et.al.)

Konstruiere Kozyklus

$$\omega_{\sigma,\kappa} : \mathfrak{gau}(P) \times \mathfrak{gau}(P) \to \mathfrak{z}$$

- $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to Y$ symmetrische, invariante Bilinearform, Y folgenvollständiger lokalkonvexer Vektorraum
- $\sigma : \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(P)^G$ Zusammenhang
- $\mathfrak{z} := \Omega^1(M,Y)/dC^\infty(M,Y)$

$$\xi \in \mathfrak{gau}(P) = C^\infty(P,\mathfrak{g})^G, X \in \mathcal{V}(P)^G$$
$$\Rightarrow X.\xi \in \mathfrak{gau}(P)$$

$$\xi, \eta \in \mathfrak{gau}(P)$$
$$\Rightarrow \Big(p \mapsto \kappa\big(\xi(p), \eta(p)\big)\Big) \in C^\infty(P,Y)^G$$
$$\Rightarrow \text{ faktorisiert zu } \kappa(\xi,\eta)_M \in C^\infty(M,Y)$$

Setze

$$\omega_{\sigma,\kappa}(\xi,\eta) := \left[X \mapsto \kappa\Big(\xi, \sigma(X).\eta\Big)_M\right]$$

σ, σ' Zusammenhänge $\Rightarrow \omega_{\sigma,\kappa} - \omega_{\sigma',\kappa}$ Korand $\Rightarrow$ $\omega_\kappa := [\omega_{\kappa,\sigma}] \in H^2\Big(\mathfrak{gau}(P), \mathfrak{z}\Big)$ beschreibt Äquivalenzklasse zentraler Erweiterungen von $\mathfrak{gau}(P)$ unabhängig von σ.

Integration von ω_κ

Ω_κ: linksinvariante 2-Form mit $\Omega_\kappa(e) = \omega_\kappa$

$$\mathrm{per}_{\omega_\kappa} : \pi_2(\mathrm{Gau}(P)) \to \mathfrak{z}, \ \ [\beta] \mapsto \int_\beta \Omega_\kappa$$

Satz: Ist $\mathrm{im}(\mathrm{per}_{\omega_\kappa}) \subseteq \mathfrak{z}$ diskret, so existiert eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathrm{Gau}(P)}$, so dass

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{z}/\mathrm{im}(\mathrm{per}_{\omega_\kappa}) & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{Gau}(P)} & \longrightarrow & \mathrm{Gau}(P) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{z} & \longrightarrow & \mathfrak{z} \oplus_{\omega_\kappa} \mathfrak{gau}(P) & \longrightarrow & \mathfrak{gau}(P)
\end{array}$$

kommutiert.

Theorem: Ist G zusammenhängend, so ist $\mathrm{im}(\mathrm{per}_{\omega_\kappa})$ genau dann diskret, wenn dies für das triviale Bündel $P = \mathbb{S}^1 \times G$ der Fall ist.